

文章编号: 1000-7598-(2006) 增-0264-05

复杂荷载条件下边坡稳定性的上限极限分析

年廷凯¹, 栾茂田¹, 郑德凤², 鲁志杰¹

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室与土木水利学院, 大连 116024; 2. 辽宁师范大学城市与环境学院, 大连 116039)

摘 要: 基于极限分析上限定理与土的抗剪强度折减技术, 考虑边坡顶面超载、坡体内孔隙水压力与地震惯性力等复杂荷载, 建立了边坡稳定的极限平衡状态方程, 采用优化方法求解边坡稳定安全系数及相应的潜在破坏模式。其中水与地震对边坡的影响作用通过虚功方程来体现, 将孔隙水压力与地震惯性力当作外力荷载做功, 将强度折减系数作为评价边坡稳定性的定量指标。通过典型算例的对比分析, 验证了方法的合理性, 并探讨了孔隙水压力、地震加速度系数对边坡稳定性的影响。

关 键 词: 边坡稳定; 孔隙水压力; 地震惯性力; 极限分析; 强度折减技术

中图分类号: T U457 文献标识码: A

Stability analysis of slope subject to complex loads based on upper-bound method of limit analysis

NIAN Ting-kai¹, LUAN Mao-tian¹, ZHENG De-feng², LU Zhi-jie¹

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering and School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Urban and Environmental Sciences, Liaoning Normal University, Dalian 116039, China)

Abstract: Based on the kinematic method of limit analysis and the shear strength reduction technique, the equation for expressing the critical limit-equilibrium state is formulated and employed to define the factor of safety and its corresponding critical failure mechanism by mathematical optimization method for a given slope subject to pore-water pressure and seismic load. The presence of pore water and seism can be embodied through work terms in the energy balance equation, and water pressure and seismic inertia force are considered as external forces similar to gravity and surface tractions. The traditional definition of factor of safety is adopted in the present method so that the results from the limit analysis can be directly compared with those from methods of slices. Through numerical analyses for several typical examples, the reasonability of the method is verified. Numerical computations are made to examine the influence of pore water pressure and horizontal seismic acceleration coefficient on slope stability.

Key words: slope stability; pore water pressure; seism inertia force; limit analysis; strength reduction technique

1 前 言

极限平衡法在边坡稳定性分析中得到了广泛应用^[1, 2], 但由于其引入许多内力简化假定, 使得边坡在极限状态时既不满足静力容许条件, 也不满足机动容许条件, 因此, 由刚体极限平衡法所得到的解答始终只是近似解^[3, 4]。而极限分析方法利用塑性理论的静力学与运动学定理寻找稳定性问题的真实解范围。其中的上限方法只要求考虑速度模式(破坏模式)和能量消耗, 应力分布并不要求满足

平衡条件, 利用功能平衡方程即可获得真实解的上限, 因此, 极限分析上限方法为寻求边坡稳定的精确解提供了一条新的思路。Chen^[5]从极限分析上限定理出发, 假定土坡沿某薄层对数螺旋间断面发生整体刚体滑动, 建立了相应的外力功与内能耗散率平衡方程, 从而得到边坡临界高度的一个上限解。Miller和Hamilton^[6]把孔隙水压力当作内力处理, 研究了包含刚体转动和剪切变形破坏模式下的边坡稳定性。尽管所采用的方法获得了正确的数值解, 但是由孔隙水压力导致系统内能耗散减少的物理意义并不明确。Michalowski^[7]将孔隙水压力作为外力做

收稿日期: 2006-07-18

基金项目: 辽宁省自然科学基金(No. 20042163)及大连理工大学青年教师基金(No. 2003211)资助项目、国家自然科学基金资助项目(No. 50579006)。

作者简介: 年廷凯, 男, 1971 年生, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程方面的教学与科研工作。E-mail: tknian@163.com

功出现在能量平衡方程中, 求解了边坡稳定高度的上限解。Chang等^[8]从塑性极限分析上限方法估算了使堤坝开始滑动的屈服地震加速度系数。

本文在 Michalowski 与 Chang 等研究的基础上, 借助能量法原理构造运动许可速度场, 将强度折减系数作为评价边坡稳定性的定量指标, 将坡顶超载、坡体内孔隙水压力与地震惯性力当作外力荷载做功, 建立相应条件下的土坡极限平衡状态方程, 引入数学优化方法求解最小安全系数及潜在破坏模式, 由此建立复杂荷载条件下边坡稳定性的极限分析上限解法。

2 极限分析上限方法

利用塑性极限分析的运动学定理能够确定边坡稳定性的真实解上限。在上限极限分析中, 关键的问题是选择或给定运动许可的速度场, 进而基于虚功率方程求得安全系数的某一上限。由此所得的安全系数值不会小于真实的安全系数。在刚塑性和小变形的假设基础上, 对于给定的破坏模式或变形场, 表达体系的内能耗散率 $\dot{W}_{\text{int}}$ 与外力功率 $\dot{W}_{\text{ext}}$ 相等的虚功率方程为

$$\dot{W}_{\text{ext}} = \dot{W}_{\text{int}} = \int_Q \sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dQ + \int_{\Gamma} \sigma'_r \dot{\varepsilon}_r^* d\Gamma \quad (1)$$

式中右端两项分别表示潜在失稳土体 Q 内和速度间断面 Γ 上的内能耗散率; 而外力功率 $\dot{W}_{\text{ext}}$ 分别包含失稳土体自重、坡顶超载、坡体内孔隙水压力与地震惯性力等所产生的等效荷载在运动许可速度场上所做的虚功率。

3 强度折减技术

工程实践中, 边坡稳定一般采用安全系数作为定量评价指标。对于某个给定状态, 假定各点的强度发挥程度相同, 则土体中所能发挥的抗剪强度应与外荷载所产生的实际剪应力相平衡, 此时实际中发挥的抗剪强度指标 c_m 和 ϕ_m 可由土的实际抗剪强度指标 c 和 ϕ 按照某一系数折减后得到^[9], 即

$$c_m = \frac{c}{F}, \quad \tan \phi_m = \frac{\tan \phi}{F} \quad (2)$$

这里 F 即为抗剪强度折减系数或强度储备系数, 当假定各点强度发挥程度相同时, 这种强度折减系数 F 相当于整体稳定安全系数 F_s 。式中 u 为孔隙水压力; γ 为土体重度; z 为计算点至地面的垂直距离。

4 考虑孔隙水压力与超载效应的边坡稳定性分析上限解法

4.1 孔隙水压力效应的表达方法

孔隙水压力一般有两种求解方法: 其一可先绘制地下水流网图再根据浸润线的位置按简化原则确定^[3, 10]; 其二可利用孔压比结合下式确定孔隙水压力^[7, 10]。

$$r_u = \frac{u}{\gamma z} \quad (3)$$

4.2 虚功方程和目标函数

对于图 1 所示的土坡, 假定潜在失稳模式为对数螺旋线旋转柱面, 则滑动面方程为

$$r = r_0 \exp[(\theta - \theta_0) \tan \phi_m] \quad (4)$$

式中 (r_0, θ_0) 为破裂面起点 A 处的极径与极角。考虑边坡土体自重、坡顶超载及坡体内孔隙水压力所引起的外力功率为

$$\dot{W}_{\text{ext}} = \dot{W}_g + \dot{W}_q + \dot{W}_u \quad (5)$$

式中 $\dot{W}_g = \gamma r_0^3 \Omega F_1$, $\dot{W}_q = q r_0^2 \Omega f_q$, $\dot{W}_u = \gamma r_0^3 \Omega r_u f_u$ 。

其中

$$F_1 = (f_1 - f_2 - f_3 - f_4); f_q = \bar{L} \left(\cos \theta_0 - \frac{1}{2} \bar{L} \cos \alpha \right);$$

$$f_u = \tan \phi_m \left(\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{z_1}{r_0} \exp[2(\theta - \theta_0) \tan \phi_m] d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{z_2}{r_0} \exp[2(\theta - \theta_0) \tan \phi_m] d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_h} \frac{z_3}{r_0} \exp[2(\theta - \theta_0) \tan \phi_m] d\theta \right)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{r_0} &= \frac{r}{r_0} \sin \theta - \sin \theta_0 + \left(\frac{r}{r_0} \cos \theta - \cos \theta_0 \right) \tan \alpha; \\ \frac{z_2}{r_0} &= \frac{r}{r_0} \sin \theta - \sin \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \phi_m] + \\ &\quad \left(\frac{r}{r_0} \cos \theta - \cos \theta_2 \exp[(\theta_2 - \theta_0) \tan \phi_m] \right) \tan \beta; \\ \frac{z_3}{r_0} &= \frac{r}{r_0} \sin \theta - \sin \theta_h \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \phi_m], \end{aligned}$$

θ_1 、 θ_2 由以下两式确定:

$$\cos \theta_1 \exp[(\theta_1 - \theta_0) \tan \phi_m] = \cos \theta_0 - \bar{L} \cos \alpha \quad (6)$$

$$\cos \theta_2 \exp[(\theta_2 - \theta_0) \tan \phi_m] =$$

$$\cos \theta_0 - \bar{L} \cos \alpha - \bar{H} \cot \beta \quad (7)$$

潜在速度间断面上的内能耗散率为

$$\dot{W}_{\text{int}} = \int_{\theta_0}^{\theta_h} (cV \cos \phi) \frac{rd\theta}{\cos \phi} =$$

$$\frac{c_m r_0^2 \Omega}{2 \tan \phi_m} \left\{ \exp[2(\theta_h - \theta_0) \tan \phi_m] - 1 \right\} = c_m r_0^2 \Omega f_c \quad (8)$$

式(5)与(8)中, (r_h, θ_h) 为破裂面末端 C' 处的极径与极角; γ 为土的重度; H 为坡高; Ω 为角速率; f_1 、 f_2 、 f_3 、 f_4 、 $\bar{L}$ 、 $\bar{H}$ 与 r_h 详见文献^[11], 其他符号的意义示于图 1。

根据虚功率方程, 令外力功率与内能耗散率相等, 则得到土坡的极限平衡状态方程如下

$$H = H(\theta_h, \theta_0, \beta') = \frac{\bar{H}}{\gamma} \frac{c_m f_c - q f_q}{(f_1 - f_2 - f_3 - f_4 + r_u f_u)} \quad (9)$$

当 $\beta' = \beta$ 时, $f_4 = 0$, 此时对数螺线通过坡脚。

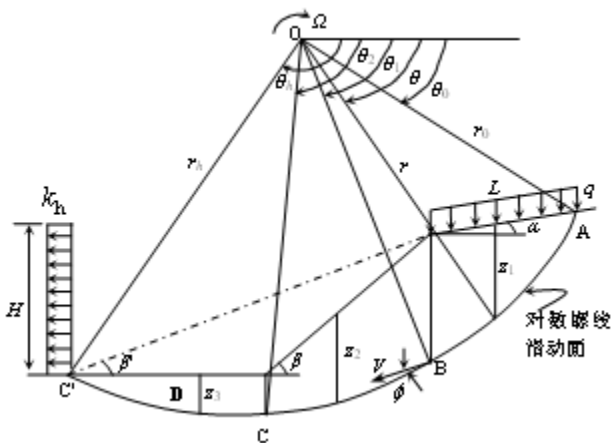


图 1 考虑孔压与地震惯性力的边坡失稳模式
Fig.1 The assumed failure mechanism of the slope

当假定土坡处于临界极限平衡状态即 $F=1$ 时由式(9)所确定的土坡最小高度称为临界自稳高度 $H_{\text{mim}} = H_{\text{cr}}$ 。当在给定坡高时强度折减系数 F 是 3 个待定变量 θ_0 , θ_h 和 β' 的非线性隐式函数, 可以利用函数(9)的极值条件确定强度折减系数的临界值, 即土坡的整体稳定安全系数 $F_s = F_{\text{cr}}$ 及其相应的临界破坏机构。当 $\beta' \leq \beta$ 时, 下列方程构成了极值条件, 即临界状态条件

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_0} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \theta_h} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \beta'} = 0; \quad H = H_{\text{act}} \quad (10)$$

采用迭代的方法, 逐步折减土的强度参数 (c , $\tan \phi$) 直至获得的极限坡高等于土坡的实际高度, 则此时的 F 为边坡真实安全系数 F_s , 由 θ_0 , θ_h 和

β' 确定了该安全系数条件下的相应土坡失稳破坏机构。由于隐式函数(9)的复杂性和多元性, 函数极值条件(10)的联立求解往往非常困难, 故寻求从最优化原理的角度确定最小安全系数。

4.3 最优化问题

将式(8)中的强度折减系数 F 看作目标函数, 在考虑孔隙水压力效应时寻求土坡稳定安全系数的数学规划列式为

$$\min F = F(\theta_h, \theta_0, \beta') \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} H = H_{\text{act}} \\ 0 < \beta' < \beta \\ 0 < \theta_0 < \pi/2 \\ \theta_0 < \theta_h < \pi \\ \theta_0 < \theta_1 < \theta_h \text{ 且满足式(6)} \\ \theta_1 < \theta_2 < \theta_h \text{ 且满足式(7)} \end{cases} \quad (12)$$

式中 H_{act} 为实际的边坡高度。采用优化方法中的直接搜索技术^[12]可以确定考虑孔隙水压力的土坡稳定安全系数及相应的最优破坏机构。为此利用 Fortran90, 考虑坡顶超载、坡体内孔隙水压力及下文的地震惯性力等复杂荷载开发了边坡稳定性极限分析上限解法专用程序, 可快速有效地确定各种情况下土坡的安全系数及其临界破坏机构。

4.4 算例分析

算例 1^[7]: 土坡临界稳定数的计算。针对算例边坡^[7]进行比较计算, 当 $F=1$ 时, 稳定数定义为 $N_s = \gamma H/c$, 计算所得到的边坡稳定数列于表 1。

表 1 稳定数与已有解答的比较

Table 1 A comparison of stability number for example slope

β /(°)	r_u	$\phi=10^\circ$		$\phi=20^\circ$	
		文献[7]	本文解	文献[7]	本文解
45	0	9.31	9.31	16.16	16.16
	0.25	7.95	7.97	10.94	10.94
	0.5	6.88	6.91	7.99	8.02
60	0	7.26	7.26	10.39	10.39
	0.25	6.38	6.39	7.69	7.70
	0.5	5.68	5.68	6.02	6.02

算例 2^[13]: 土坡稳定安全系数的计算。针对一坡度为 1:2、坡高为 12.2 m 的均质土坡^[13], 计算中所采用的材料参数为 $\gamma=18.85 \text{ kN/m}^3$, $c'=28.73 \text{ kPa}$, $\phi'=20^\circ$ 。将本文方法的计算结果与其他各种方法的解答进行了比较, 结果列于表 2。

由上述 2 个算例的对比分析可见, 本文的计算结果与已有解答十分接近, 且随着孔隙水压力比的增大, 土坡的稳定性明显地降低。

表 2 安全系数 F_s 的计算结果与已有解答^[13]的对比分析
Table 2 A comparison of safety factors for example slope

稳定性分析方法	F_s	
	$r_u=0$	$r_u=0.25$
普通条分法	1.928	1.607
简化 Bishop 法	2.080	1.766
Spencer 法	2.073	1.761
Janbu 法	2.008	1.708
Morgenstern-Price 法	2.076	1.765
Zeng 法	2.097	1.720
本文解	2.022	1.723

5 考虑拟静力地震荷载的土坡稳定性极限分析上限解法

5.1 基本方程推导

针对图 1 所示的土坡, 由坡体自重、坡顶超载及地震惯性力所引起的总外力功率为

$$\dot{W}_{\text{ext}} = \dot{W}_g + \dot{W}_{q1} + \dot{W}_e + \dot{W}_{q2} \quad (13)$$

式中 $\dot{W}_g = \gamma r_0^3 \Omega (f_1 - f_2 - f_3 - f_4)$; $\dot{W}_{q1} = q r_0^2 \Omega f_{q1}$; $\dot{W}_e = k_h \gamma r_0^3 \Omega (f_5 - f_6 - f_7 - f_8)$; $\dot{W}_{q2} = \zeta k_h q r_0^2 \Omega f_{q2}$ 。其中,

$$f_{q1} = \bar{L} \left(\cos \theta_0 - \frac{1}{2} \bar{L} \cos \alpha \right),$$

$$f_{q2} = \bar{L} \left(\sin \theta_0 + \frac{1}{2} \bar{L} \sin \alpha \right),$$

$$f_5 = \frac{A - 3 \tan \phi_m \sin \theta_0 + \cos \theta_0}{3(1 + 9 \tan^2 \phi_m)},$$

$$f_6 = \frac{\bar{L}}{6} (2 \sin \theta_0 + \bar{L} \sin \alpha) \sin(\theta_0 + \alpha),$$

$$f_7 = \frac{B}{6} [\sin(\theta_h - \theta_0) - \bar{L} \sin(\theta_h + \alpha)] (\sin \theta_0 + \bar{L} \sin \alpha + C),$$

$$f_8 = \bar{H}^2 \frac{\sin(\beta - \beta')}{2 \sin \beta \sin \beta'} \left(\sin \theta_0 + \bar{L} \sin \alpha + \frac{2}{3} \bar{H} \right)。上述$$

各式中

$$A = (3 \tan \phi_m \sin \theta_h - \cos \theta_h) \exp[3(\theta_h - \theta_0) \tan \phi_m],$$

$B = \exp[(\theta_h - \theta_0) \tan \phi_m]$, $C = B \sin \theta_h$, ζ 为超载引起的地震惯性力系数, 其他符号的意义同前。沿潜在速度间断面上的内能耗散率同式(8)。

根据虚功率方程, 令外力功率与内部能量耗散率相等, 则得到地震条件下土坡的临界状态方程:

$$k_h = k_h(\theta_h, \theta_0, \beta') = \frac{c_m f_c - q f_{q1} - \gamma \frac{H}{\bar{H}} F_1}{\gamma \frac{H}{\bar{H}} F_2 + \zeta q f_{q2}} \quad (14)$$

式中 F_1 如前面的表达, $F_2 = (f_5 - f_6 - f_7 - f_8)$ 。当 $\beta' = \beta$ 时, $f_4 = f_8 = 0$, 此时对数螺线通过坡脚。

针对给定的边坡高度 H , 当达到极限平衡状态时, 水平地震加速度系数 k_h 是 θ_0 、 θ_h 和 β' 等 3 个待定变量的非线性隐式函数, 可以利用函数(14)的极值条件确定地震加速度系数的临界值即屈服加速度系数的最小上限解 $k_{h\min} = k_c$ 及其相应的临界破坏机构。

实际工程中, 往往更关心设计地震荷载下土坡的稳定性。当给定边坡高度及设计地震加速度系数 k_{hd} 时, 将式(14)中的强度折减系数 F 看作目标函数, 在考虑地震惯性力效应时寻求土坡稳定安全系数的数学规划列式为

$$\min F = F(\theta_h, \theta_0, \beta') \quad (15)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} H = H_{\text{act}} \\ k_h = k_{hd} \\ 0 < \beta' < \beta \\ 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \\ \theta_0 < \theta_h < \pi \end{cases} \quad (16)$$

采用前面开发的专用程序即可求解拟静力地震作用下边坡稳定的安全系数及其相应的破坏机构。

5.2 算例验证

针对一均质土坡^[8], 坡高为 $H=30.5$ m, 坡面超载强度为 $q=5.75$ kPa, 超载引起的地震惯性力系数为 $\zeta=0.5$; 土性参数为 $c/\gamma H=0.15$, $\phi=40^\circ$ 。针对不同坡角计算所得到的屈服加速度系数及其与已有解答的比较列于表 3。

由表可见, 本文的计算结果与已有解答十分接近, 且随着坡角的增大, 土坡的屈服加速度显著地降低。

表 3 屈服加速度系数计算结果与对比

Table 3 A comparison of yield acceleration coefficients computed by various methods

$\beta / (^{\circ})$		45	60	75	90
k_c	已有解 ^[8]	0.671	0.506	0.320	0.098
	本文解	0.670	0.503	0.316	0.093

5.3 边坡安全系数与地震加速度系数间的关系

针对一均质土坡^[14], 对于给定的坡角 β 等有关

参数情况下,通过变动参数对比计算与分析,探讨水平地震加速度系数对边坡稳定性的影响。针对不同的地震加速度系数通过计算所得到的土坡稳定安全系数如图 2 所示。

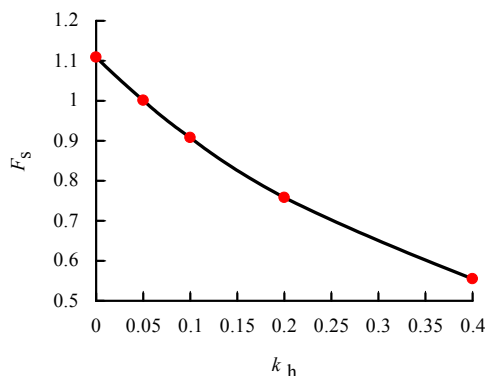


图 2 土坡安全系数对于地震加速度间的关系

Fig.2 Effect of seismic acceleration coefficient on safety factor of slope

由图可见,随着水平地震加速度系数 k_h 的增大,边坡稳定安全系数 F_s 降低,两者之间的关系近似地为双曲线。

6 结 语

将极限分析上限定理与强度折减技术相结合建立了边坡稳定性分析的极限分析上限解法,其中考虑了坡顶超载、坡体内孔隙水压力与地震惯性荷载等复杂情况。典型算例的数值计算与对比分析表明,随着孔隙水压力比的增大,边坡的稳定性明显地下降;随着坡角的增大,边坡的屈服加速度显著地降低;随着水平地震加速度系数 k_h 的增大,边坡稳定安全系数 F_s 降低,两者之间近似地呈双曲线关系。

参 考 文 献

- [1] 郑颖人, 赵尚毅, 时卫民, 等. 边坡稳定分析的一些进展[J]. 地下空间, 2001, 21(4): 262—272.
ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, SHI Wei-min, et al. Progress in analysis of slope stability[J]. *Underground Space*, 2001, 21(4): 262—272.
- [2] Duncan. State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slope[J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1996, 122(7): 577—595.
- [3] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 考虑孔隙水压力的土坡稳定性刚体有限元上限分析[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(3): 273—277.
YIN Jian-hua, CHEN Jian, LEE Chack-fan. A rigid finite element method for upper bound limit analysis of soil slopes subjected to pore water pressure[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2003, 25(3): 273—277.
- [4] 王均星, 李泽, 陈炜. 考虑孔隙水压力的土坡稳定性的有限元下限分析[J]. 岩土力学, 2005, 26(8): 1 258—1 265.
WANG Jun-xing, LI Ze, CHEN Wei. Lower bound analysis of soil slope stability using finite elements subjected to pore water pressure[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(8): 1 258—1 265.
- [5] Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity[M]. Amsterdam (The Netherlands): Elsevier Science, 1975.
- [6] Miller T W, Hamilton J H. A new analysis procedure to explain a slope failure at the Martin Lake mine[J]. *Geotechnique*, 1989, 39(1): 107—123.
- [7] Michalowski R L. Limit analysis of slopes subjected to pore pressure[A]. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Siriwardane & Zaman(eds), Balkema: Rotterdam, 1994, 2 477—2 482.
- [8] Chang C J, Chen W F, James T PY. Seismic displacements in slopes by limit analysis[J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1984, 110(7): 860—875.
- [9] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 343—346.
ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(3): 343—346.
- [10] Kim J M, Salgado R and Lee J. Stability analysis of complex soil slopes using limit analysis[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 2002, 128(7): 546—557.
- [11] 年廷凯, 栾茂田, 杨庆. 阻滑桩加固土坡稳定性分析与桩基的简化设计[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(19): 3 427—3 433.
NIAN Ting-kai, LUAN Mao-tian, YANG Qing. Stability analysis of slopes with stabilizing piles and their simplified design[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(19): 3 427—3 433.
- [12] 唐焕文, 秦学志. 实用最优化方法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2000.
- [13] Zeng S, Liang R. Stability analysis of drilled shafts reinforced slope[J]. *Soils and Foundations*, 2002, 42(2): 93—102.
- [14] Hassiotis S, Chameau J L, Gunaratne M. Design method for stabilization of slopes with piles[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 1997, 123(4): 314—323.